10 – Дәріс

<u>Тақырыбы</u>: Күрделі, кері функцияларды дифференциалдау. Параметрлік түрде берілген функцияның дифференциалдануы.

1-теорема. E аралығында анықталған $f : E \to \mathrm{R}$ және F аралығында анықталған $g : F \to \mathrm{R}$ функциялары беріліп, $f(E) \subset F$ болсын. Егер $f(x)$ функциясы $x_0 \in E$ нүктесінде, ал $g(y)$ функциясы $y_0 = f(x_0)$ нүктесінде дифференциалданса, онда $h = g(f(x))$ ***күрделі функциясы*** x_0 нүктесінде дифференциалданады және

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{1}$$

Дәлелдеуі. $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын болғандықтан

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),\, x \to x_0. \tag{2}$$

Ал $g(y)$ функциясы y_0 нүктесінде дифференциалданатын болғандықтан, $g(y) - g(y_0)$ айырымын былай

$$g(y) - g(y_0) = \left(g'(y_0) + \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0) \right)(y - y_0)$$

өрнектеп, $y \to y_0$ ұмтылғанда $\alpha(y, y_0) = \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0)$ шексіз аз функциясын енгізіп, оны

$$g(y) - g(y_0) = \left(g'(y_0) + \alpha(y, y_0)\right)(y - y_0) \tag{3}$$

түрінде жазуға болады. Сөйтіп (3) теңдікте $y = f(x),\, y_0 = f(x_0)$ деп алсақ, онда (2) бойынша

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \left(g'(f(x_0)) + \alpha(f(x), f(x_0)\right)(f(x) - f(x_0)) =$$
$$= \left(g'(f(x_0)) + \alpha(f(x), f(x_0)\right)\left(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\right),\, x \to x_0,$$

теңдігіне келеміз. Бұдан $x \neq x_0$ деп,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \left(g'(f(x_0)) + \alpha(f(x), f(x_0))\right)\left(f'(x_0) + \frac{o(x - x_0}{x - x_0} \right)$$

теңдігін, ал одан $x \to x_0$ ұмтылдырып шекке көшіп және $\alpha(y, y_0)$ функциясының $y = y_0$ болғанда үзіліссіздігін ескеріп,

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

(1) формуланы дәлелдейміз.

1-теорема. Егер E аралығында қатаң монотонды және үзіліссіз $f : E \to \mathrm{R}$ функциясы $x_0 \in E$ нүктесінде дифференциалданса және $f'(x_0) \neq 0$ болса, онда оның $x = g(y)$ **кері функциясы** $y_0 = f(x_0)$ нүктесінде дифференциалданады және

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{1}$$

Дәлелдеуі. 3-теоремасы бойынша $g(y)$ функциясы $f(E)$ аралығында үзіліссіз. Сондықтан $y \to y_0$ ұмтылғанда $x = g(y)$ функциясы $x_0 = g(y_0)-$ге ұмтылады. Ал $y = f(x), y_0 = f(x_0)$ болғандықтан

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

теңдіктері орындалады. Бұдан $y \to y_0$ ұмтылдырып шекке көшсек,

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

(1) формуланы дәлелдейміз.